GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2017

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL I
MODULE 1: CALCULUS EN ALGEBRA

Tyd: 2 uur | 200 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 8 bladsye en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i–iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.
2. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders aangedui.
3. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.
4. Diagramme is nie op skaal geteken nie.
5. Rond jou antwoorde af tot twee desimale syfers, tensy anders aangedui.

VRAAG 1

1.1 (a) Los op vir x indien:
$(\ln x)^2 + \ln x^2 - 3 = 0$ (6)

(b) Los op vir x in terme van p en q: $e^{|x+p|} = q$ (5)

1.2 Die vergelyking van 'n grafiek word gegee as $y = x^2 + |2x - 3|$.

(a) Skryf die y-afsnit neer. (1)

(b) Verduidelik waarom die grafiek geen x-afsnitte het nie. (3)

(c) Skryf die koördinate van die punt neer waar die vergelyking van die grafiek nie differensieerbaar is nie. (2)

(d) Bepaal die koördinate van die stasionêre punt. (4)

[21]

VRAAG 2

Die bevolking van 'n bepaalde stad wat in 1970 gestig is, groei eksponensieel volgens die model:

$$P = Ae^{kt}$$

waar P die bevolking in 1 000'e by tyd t is en A en k konstantes is.
(Let daarop dat $t = 0$ in 1970.)
In 1975 was die bevolking 596 000 en in 1985 was dit 889 000.

2.1 Bereken die waardes van A en k onderskeidelik. (7)

2.2 Gebruik vervolgens die model om die jaar te beraam waarin die bevolking tot 6 000 000 sal gegroei het. (3)

[10]

VRAAG 3

3.1 $px^2 + px + 1 = 0$ word gegee.
Bepaal 'n reëele waarde van p sodanig dat die oplossings van die vergelyking van die vorm $x = a + bi$ is, waar a en b rasionaal is en $b \neq 0$. (6)

3.2 Die vergelyking $x^4 - 2x^3 + px^2 - 8x + 20 = 0$ het 'n oplossing $x = 2i$.
Bewys dat die vergelyking geen reëele oplossings het nie en meld die reëele waarde van p. (8)

3.3 Evalueer: $i + i^2 + i^3 + ... + i^{2017}$ (4)

[18]

VRAAG 4

Bewys deur wiskundige induksie dat:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)..........\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

vir alle heelgetalwaardes van n, $n \geq 2$.

[12]

VRAAG 5

5.1 'n Funksie word soos volg gedefinieer, waar *a* en *b* reële konstantes is:

$$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{as} \quad x\le 1 \\ \dfrac{4}{x} & \text{as} \quad 1<x\le 2 \\ ax+b & \text{as} \quad x>2 \end{cases}$$

(a) Bewys dat f kontinu is by $x = 1$ en gee 'n rede waarom dit duidelik nie differensieerbaar is by $x = 1$ nie. (6)

(b) Bereken *a* en *b* sodanig dat f differensieerbaar is by $x = 2$. (8)

5.2 Beskou $f(x)=\dfrac{6x^2-x-1}{px-2}$.

(a) Vir watter waarde(s) van *p* sal $y=2x+1$ 'n asimptoot van die grafiek van f wees? (5)

(b) Beskou die grafiek van f wanneer $p = 4$.

(i) Noem die aard van die diskontinuïteit van f. Verduidelik jou antwoord. (4)

(ii) Toon dat f in werklikheid 'n diskontinue reguitlyn is en skets die grafiek. (5)

(c) Bepaal $f'(x)$ wanneer $p = 3$ en toon dat f twee stasionêre punte het. (7)

[35]

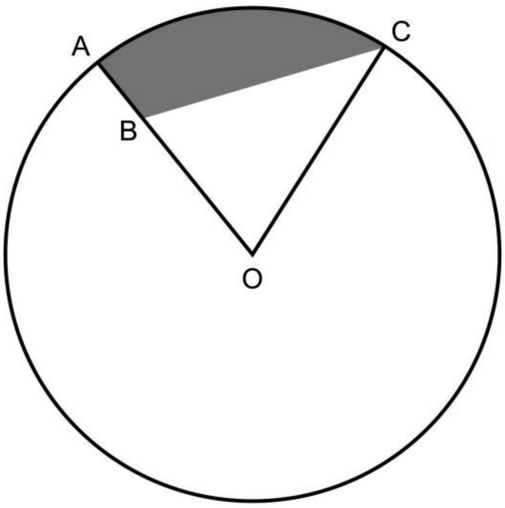
VRAAG 6

In die gegewe diagram is O die middelpunt van die sirkel en A en C lê op die omtrek.

B lê op AO. AB = 2 cm, OB = 8 cm, BC = 10 cm.

6.1 Bereken die grootte van $B\hat{O}C$. (4)

6.2 Bepaal die oppervlakte van die gearseerde gebied begrens deur AB, BC en boog AC.



(6)
[10]

VRAAG 7

7.1 Indien $y = -\dfrac{1}{\sqrt{4x+3}}$, dan $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{m}{(4x+3)^n}$.

Skryf die waardes van *m* en *n* onderskeidelik neer. (5)

7.2 Gegee: $\sin y + \cos x = 1$ en $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$

(a) Bepaal $\dfrac{dy}{dx}$. (5)

(b) Bereken, sonder 'n sakrekenaar, die gradiënt van die gegewe kromme wanneer $x = \dfrac{\pi}{3}$. (5)

7.3 Rajesh wil 'n oplossing bepaal vir die vergelyking $\tan x + x^2 + 1 = 0$ deur Newton se metode te gebruik.

(a) Indien hy $x = -1$ as 'n aanvanklike waarde gebruik, bereken Rajesh se 4de herhaling soos dit op sy sakrekenaar sal verskyn, akkuraat tot 4 desimale plekke. (7)

(b) Sit die herhaling voort om die antwoord tot 7 desimale plekke te bereken. (2)

[24]

VRAAG 8

Suzie werk met 'n funksie, *g*, wat deur die punt (1; 4) gaan.
Sy differensieer die funksie en bepaal dat $g'(x) = 4x^3 + 3x^2$.

8.1 Bereken die *x*-koördinate van die buigpunte en dui aan of elkeen stasionêr of niestasionêr is. (8)

8.2 Bepaal die algebraïese uitdrukking van die funksie *g*. (6)

8.3 Verduidelik waarom 'n kubiese grafiek altyd 'n buigpunt sal hê, maar byvoorbeeld 'n vierdegraadsgrafiek dalk nie. (3)

[17]

VRAAG 9

9.1 Gegee: $\sec^4\theta = \sec^2\theta.\tan^2\theta + \sec^2\theta$

(a) Bewys die gegewe identiteit en ignoreer enige beperkings. (4)

(b) Bepaal vervolgens of andersins die integraal:

$\int \sec^4\theta \, d\theta$ (7)

9.2 Bepaal die volgende integrale:

(a) $\int (\sin x + \cos x)^2 \, dx$ (8)

(b) $\int (x-2)\sqrt{3x^2 - 12x + 5}\, dx$ (7)

[26]

VRAAG 10

10.1 Die oppervlakte tussen die kromme $y = x^2 - 4x + 8$ en die x-as moet benader word deur 'n reeks reghoeke van breedte 1 eenheid te gebruik.

Verduidelik waarom die antwoord akkurater sal wees op die interval [–1; 3] as op die interval [–1; 2]. (4)

10.2 $\int_0^4 h(x)dx = 2$ word gegee.

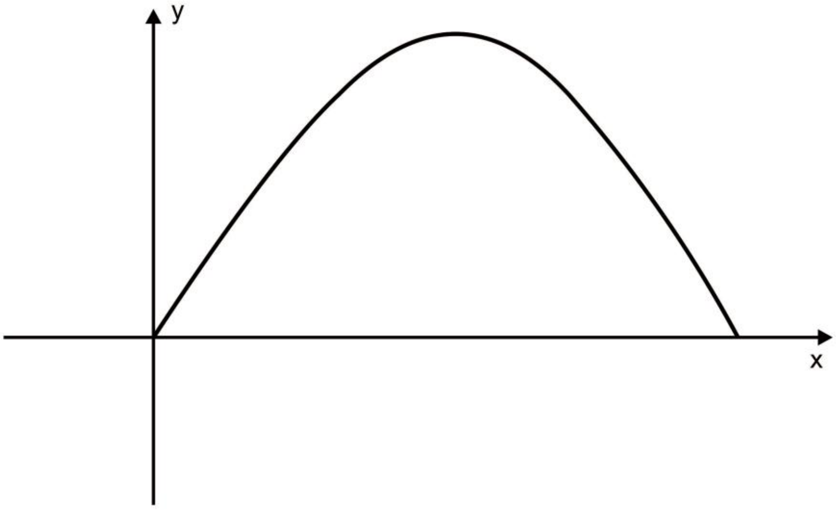
Bereken $\int_{-4}^{4} h(x)dx$ indien:

(a) $h(x) = h(-x)$ (2)

(b) $3h(x) = 2h(-x)$ (4)

(c) $h(x) = -h(-x)$ (2)

10.3 'n Parabool wat deur die oorsprong gaan, het 'n draaipunt by $\left(\frac{p}{2};\frac{1}{p}\right)$.



(a) Bepaal die vergelyking van die grafiek in die vorm $y = a(x-b)^2 + c$ waar die konstantes a, b en c in terme van p uitgedruk word. (6)

(b) Bewys dat die oppervlakte wat ingesluit word tussen die kromme en die x-as op die interval $0 < x < p$ onafhanklik is van p. (9)

[27]

Totaal: 200 punte