GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2016

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL II

Tyd: 1 uur | 100 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 14 bladsye en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i–iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.

2. Hierdie vraestel bestaan uit DRIE modules:

   Kies **EEN** van die **DRIE** modules:

   MODULE 2: STATISTIEK (100 punte) OF
   MODULE 3: FINANSIES EN MODELLERING (100 punte) OF
   MODULE 4: MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE (100 punte)

3. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word.

4. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.

5. Diagramme is nie op skaal geteken nie.

6. **Afronding van finale antwoorde.**

   MODULE 2: Vier desimale plekke, tensy anders aangedui.
   MODULE 3: Twee desimale plekke, tensy anders aangedui.
   MODULE 4: Twee desimale plekke, tensy anders aangedui.

MODULE 2 STATISTIEK

VRAAG 1

1.1 In 'n groot stad is een persoon uit vyf linkshandig.

(a) Bereken die waarskynlikheid dat presies drie linkshandig sal wees in 'n ewekansige steekproef van 10 mense. (5)

(b) Bepaal die waarskynlikste getal linkshandige mense in 'n ewekansige steekproef van 15 mense. (2)

(c) In 'n ewekansige steekproef van n mense is die waarskynlikheid dat die steekproef minstens een linkshandige persoon bevat groter as 0,95. Los op vir n, en bepaal vervolgens die kleinste getal mense wat in die steekproef nodig is. (8)

1.2 Bjorn stoor sy digitale beelde op sy rekenaar in drie afsonderlike gidse, naamlik "Familie", "Vriende" en "Roei". Sy Familie-gids bevat drie beelde, sy Vriende-gids bevat vier beelde en sy Roei-gids bevat agt beelde. Al die beelde is verskillend.

(a) Op hoeveel maniere kan hy hierdie 15 beelde in 'n ry op sy rekenaarskerm rangskik as hy die beelde van elke gids bymekaarhou? (5)

(b) Bereken die waarskynlikheid dat as Bjorn ses beelde ewekansig kies, daar twee van elke gids sal wees. (5)

(c) Bereken die getal verskillende maniere waarop Bjorn ses van hierdie beelde kan kies indien daar minstens drie beelde uit die Roei-gids en minstens een beeld uit elkeen van die ander twee gidse is. (8)

[33]

VRAAG 2

2.1 Dit is bekend dat die wind 'n "verkoelingsfaktor" veroorsaak sodat die menslike liggaam die temperatuur as laer as die werklike temperatuur ervaar. Die volgende tabel gee die temperatuur (t °C) wat ervaar word vir verskillende windsnelhede (w km/h) wanneer die werklike temperatuur 10 °C is. **(Werk akkuraat tot twee desimale plekke in hierdie vraag.)**

w (km/h)	0	5	10	15	20	25
t (°C)	10°	6°	–6°	–16°	–22°	–25°

(a) Bepaal die vergelyking van 'n geskikte regressielyn waaruit 'n waarde van t beraam kan word vir 'n gegewe waarde w. (4)

(b) Bepaal die waarde van die korrelasiekoëffisiënt vir die data en sê wat dit omtrent die data aandui. (2)

(c) Beraam die temperatuur wat ervaar word wanneer die windsnelheid 35 km/h is. (2)

(d) Lewer kommentaar oor die betroubaarheid van hierdie beraming. (2)

2.2 Timello probeer elke dag om sy vriend Nicky te bel. Elke keer wanneer hy bel, is daar 'n 50%-kans dat Nicky sal antwoord. Indien Nicky antwoord, bel Timello nie weer daardie dag nie. Indien Nicky nie antwoord nie, probeer Timello na 'n paar minute weer bel. Indien Nicky na vier pogings nie geantwoord het nie, probeer Timello nie weer daardie dag nie.

(a) Teken 'n boomdiagram om hierdie situasie te illustreer. (4)

(b) Laat X die getal onbeantwoorde telefoonoproepe wees wat Timello op 'n gegewe dag gemaak het. Kopieer en voltooi die tabel wat die waarskynlikheidsverdeling van X toon.

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$		$\frac{1}{4}$			

(4)

(c) Bereken die verwagte getal onbeantwoorde telefoonoproepe op 'n dag indien die formule vir die Verwagte Waarde van die stogastiese veranderlike X gegee word as:

$$E\left[X\right] = \sum P(X = x) \cdot x$$ (2)

[20]

VRAAG 3

3.1 In 'n opname van motors wat by 'n hokkiewedstryd geparkeer is, is 200 motors uit 'n ewekansige steekproef van 250 motors met 'n opspoortoestel toegerus.

(a) Bereken 'n 96%-vertrouensinterval vir die populasieproporsie van geparkeerde motors wat met 'n opspoortoestel toegerus is. (6)

(b) Beskryf in woorde wat hierdie vertrouensinterval statisties beteken. (2)

3.2 'n Stogastiese veranderlike X is normaal verdeel met 'n gemiddelde μ en 'n standaardafwyking σ.

(a) Indien $5\sigma = 3\mu$ gegee word, bepaal $P(X < 2\mu)$. (8)

(b) Daar word gegee dat die standaardafwyking, σ, 2 is en dat $P\left(X > \frac{1}{3}\mu\right) = 0{,}8.$ Bereken die gemiddelde, μ. (7)

[23]

VRAAG 4

Verlede jaar het Gareth bevind dat sy rit werk toe gemiddeld 45,7 minute geneem het met 'n standaardafwyking van 3,2 minute. Gareth wil toets of sy reistyd hierdie jaar toegeneem het. Hy teken die tyd, in minute, aan vir 'n ewekansige steekproef van agt ritte hierdie jaar met die volgende resultate:

46,2	41,7	49,2	47,1	47,2	48,4	53,7	45,5

Daar kan aangeneem word dat die populasie van hierdie jaar se reistye normaal verdeel is, ook met 'n standaardafwyking van 3,2 minute.

4.1 Dui met 'n rede aan of Gareth 'n eenkantige of 'n tweekantige hipotesetoets moet gebruik. (2)

4.2 Bepaal of die steekproef betekenisvolle bewys by die 4%-betekenispeil lewer dat Gareth se reistyd hierdie jaar toegeneem het. Noem spesifiek die gevolgtrekking van Gareth se bevindings. (10)

[12]

VRAAG 5

Drie vriende, Arnie, Michael en Connor, gaan na 'n musiekkonsert maar hulle het nie bespreek by watter ingang van die konsert hulle sal ontmoet nie. Daar is vier ingange: 1, 2, 3 en 4. Elke vriend kies 'n ingang **onafhanklik**.

- Die waarskynlikheid dat Arnie Ingang 1 sal kies, is $\frac{1}{2}$ met gelyke waarskynlikhede vir die oorblywende drie ingange.
- Dit is ewe waarskynlik dat Michael enigeen van die vier ingange sal kies.
- Die waarskynlikheid dat Connor Ingang 1, 2, 3 en 4 sal kies, vorm die verhouding 1 : 1 : 2 : 3.

5.1 Bereken die waarskynlikheid dat minstens twee vriende Ingang 1 sal kies. (6)

5.2 Bereken die waarskynlikheid dat die drie vriende almal by dieselfde ingang sal wees. (6)

[12]

Totaal vir Module 2: 100 punte

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING

VRAAG 1

Wynand erf R42 000 van sy ouma, wat hy in 'n spaarrekening belê. Agt maande ná hierdie belegging, onttrek hy R5 000 om vir herstelwerk aan sy motor te betaal. Vyftien maande ná sy aanvanklike belegging, gee sy maatskappy vir hom 'n bonus van R27 000 wat hy onmiddellik in dieselfde rekening belê. Die rekening is oop vir 'n totaal van twee jaar.

Vir die eerste jaar verdien die rekening rente teen 4,62% per jaar, maandeliks saamgestel. Aan die begin van die tweede jaar verander die rente na 4,8% per jaar, kwartaalliks saamgestel.

1.1 Teken 'n tydlyn wat die situasie hierbo voorstel. Dui alle veranderinge met betrekking tot geld en rentekoerse aan. Toon duidelik op watter tydstip hierdie veranderinge plaasvind. (6)

1.2 Bereken die eindsaldo van die rekening aan die einde van die twee jaar. (10)

[16]

VRAAG 2

Lolwethu erf R1 000 000 van 'n langverlore, ryk familielid! Om haar inkomste aan te vul besluit sy om die geld in 'n lewende annuïteit te belê teen 6,4% per jaar, kwartaalliks saamgestel.

Sy sal R30 000 per kwartaal uit die lewende annuïteit onttrek en dadelik begin. Bepaal, in jare en maande, hoe lank haar erflating sal hou.

[12]

VRAAG 3

Wayne se ouers beplan vir sy laaste skooljare in 2033, 2034 en 2035. Hulle projekteer die skoolfooie om onderskeidelik R28 000, R30 400 en R33 000 vir die drie jaar te wees.

Die eerste betaling in 'n spaarrekening sal op 1 Januarie 2017 gedoen word en die laaste betaling op 1 Januarie 2035. Hulle beplan om elke maand R270 te deponeer in 'n rekening wat 5,2% rente per jaar verdien, maandeliks saamgestel. Geld sal op 1 Januarie 2033, 1 Januarie 2034 en 1 Januarie 2035 onttrek word om sy skoolfooie te betaal.

3.1 Toon dat hulle aangeneem het die jaarlikse (saamgestelde) inflasiekoers sal min of meer konstant wees gedurende 2033 en 2034. (6)

3.2 Bereken die totale waarde waartoe hul maandelikse betalings sal aangroei op 1 Januarie 2035. (6)

3.3 Bepaal die totale rente wat oor die volle tydperk van die belegging deur die spaarrekening verdien word. (4)

3.4 Bepaal of die spaarrekening voldoende sal wees om die skoolfooie vir al drie jaar te dek. Toon jou berekeninge. (8)

[24]

VRAAG 4

4.1 Bereken die waardes van die volgende drie terme in die ry wat beskryf word deur die tweedeorde-rekursieformule:

$$T_{n+1} = 4.T_n + 3.T_{n-1} - 4(-1)^{n-1} \text{ met } T_1 = -T_2 = -2$$ (5)

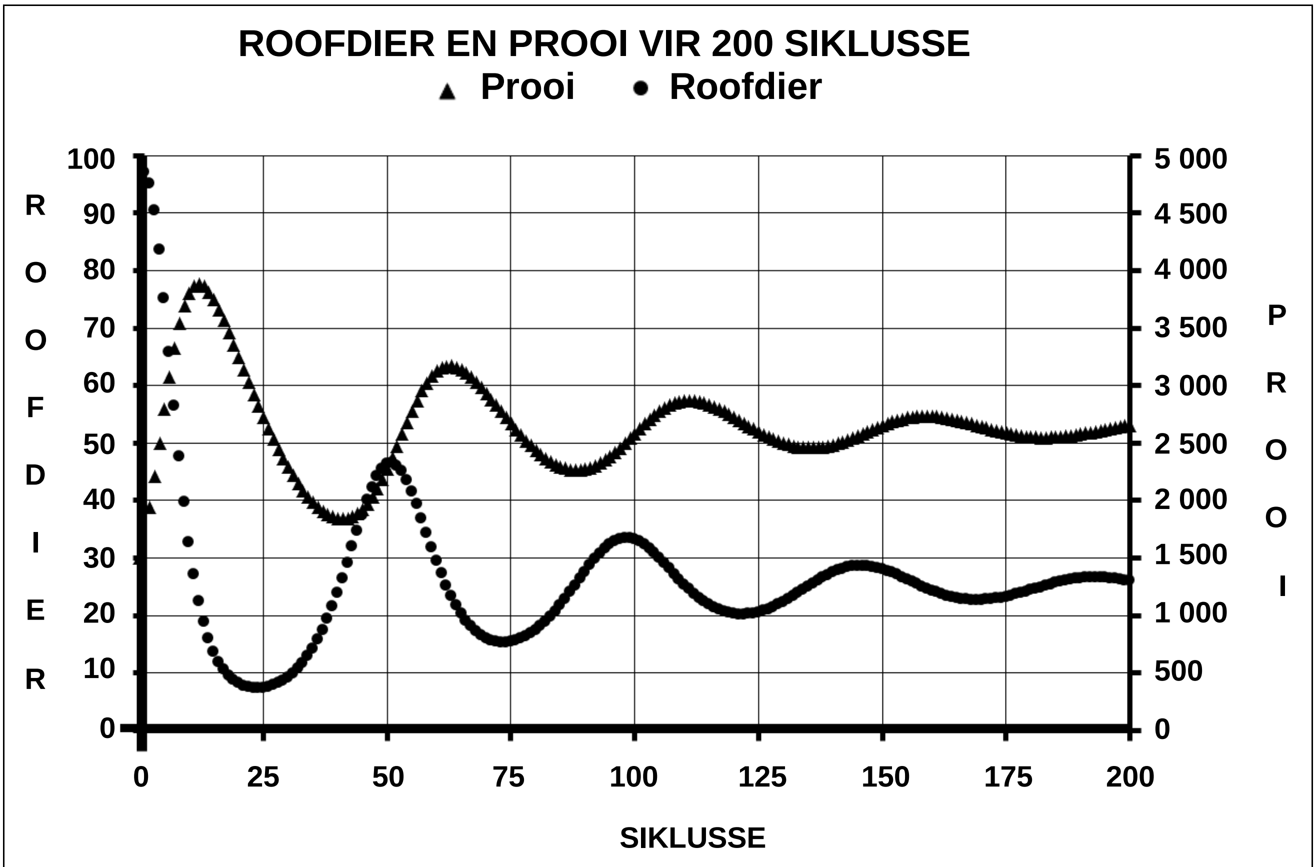
4.2 'n Malthusiaanse model word beskryf deur die rekursieformule $T_{n+1} = p.T_n$ met $0 < p < 1$. Teken 'n grafiek van T_n teen n (met n die onafhanklike veranderlike) wat die populasietendens vir hierdie model voorstel namate n toeneem. (4)

4.3 'n Logistiese model het 'n dravermoë van 120 en 'n aanvanklike populasie van 54. **Twee** siklusse later het die populasie 70 bereik. Bereken die intrinsieke groeikoers van die model, korrek tot twee desimale syfers. (9)

[18]

VRAAG 5

Die meegaande grafiek stel 200 siklusse van die populasies vir 'n bepaalde roofdier-en-prooi-verwantskap voor op grond van die Lotka-Volterra-model.



5.1 Dit is 'n diskretepopulasie-model. Hoe kan dit in die grafiek gesien word en wat beteken "diskreet" wiskundig? (2)

5.2 Gee die benaderde waardegebied van die prooipopulasie as 'n interval. (2)

5.3 Ongeveer hoeveel siklusse ná elke spits van die prooipopulasie bereik die roofdierpopulasie 'n spits? (2)

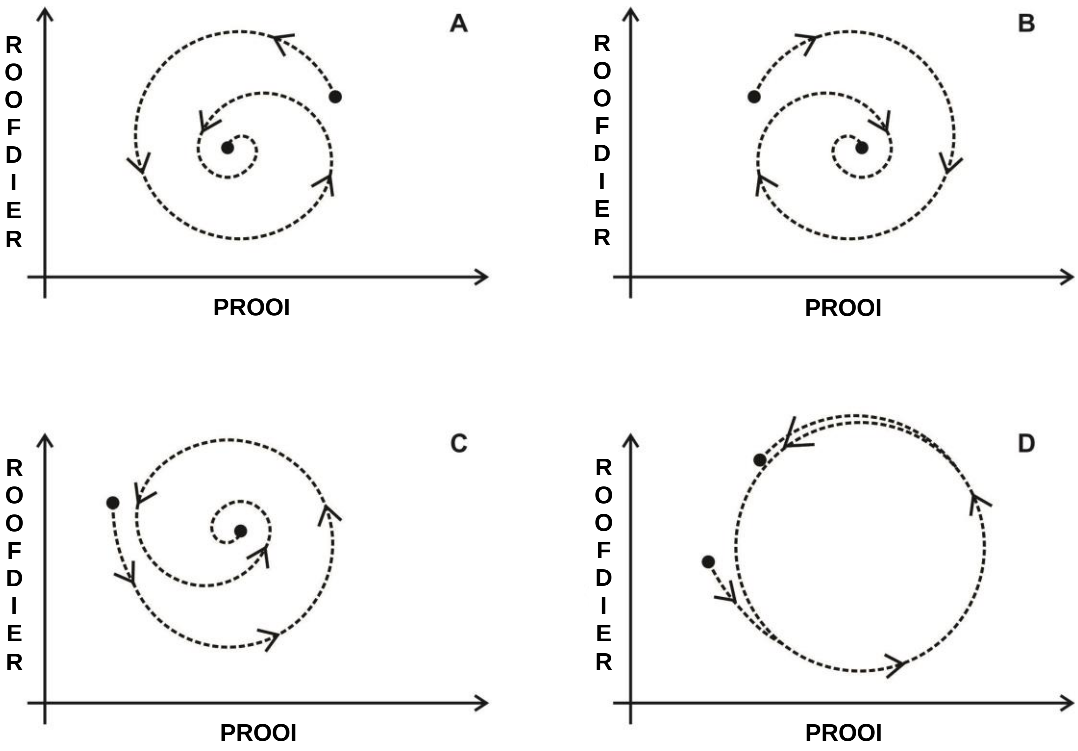
5.4 Wat is die grootste in die roofdierpopulasie: die koers van toename van 'n minimum na 'n maksimum, of die koers van afname van 'n maksimum tot 'n minimum? Gee 'n rede vir jou antwoord. (2)

5.5 Verwys na die Lotka-Volterra-formules in die **Inligtingsboekie**:

(a) Watter van die parameters a, b of K moet verminder word sodat die prooipopulasie toeneem? Gee 'n rede vir jou antwoord. (3)

(b) Die parameter c word vermeerder. Watter impak kan dit op die prooipopulasie hê? Verduidelik jou antwoord volledig in woorde. (3)

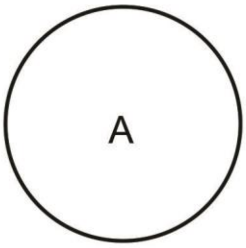
5.6 Watter van die fasestippings stel hierdie bepaalde model die beste voor? Verduidelik jou keuse.



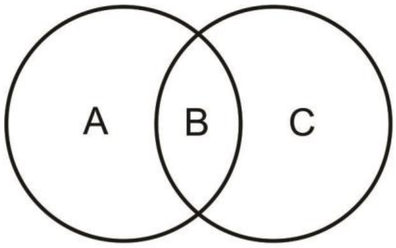
(4)
[18]

VRAAG 6

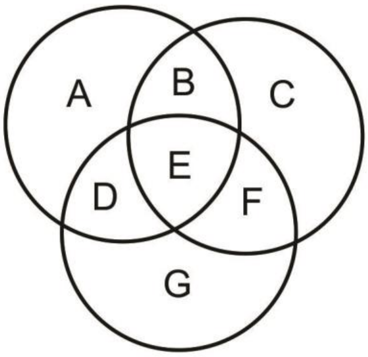
Venn-diagramme is 'n gerieflike manier om die snydings van versamelings voor te stel. Die getal gebiede wat hulle met mekaar vorm, skep 'n numeriese patroon.



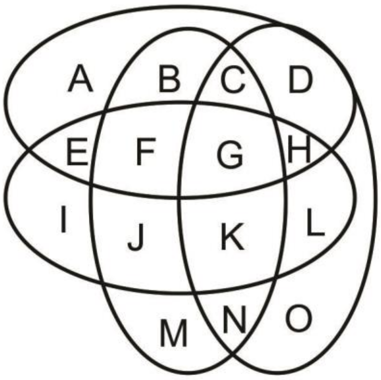
Vir een versameling, is daar slegs een interne gebied (A)



Vir twee versamelings, is daar drie interne gebiede (A, B en C)



Vir drie versamelings, is daar sewe interne gebiede (A tot G)



Vir 4 versamelings, is daar 15 interne gebiede (A tot O)

6.1 Wanneer vier versamelings gebruik word, gee die letter van die gebied wat die snyding van al vier versamelings voorstel. (2)

6.2 Om vyf versamelings wat mekaar sny te teken, sal onredelik wees. Hoeveel interne gebiede sal jy egter verwag dat vyf versamelings wat mekaar sny, sal hê? (2)

6.3 Skep 'n eersteorde-rekursieformule wat die getal interne gebiede, met die byvoeging van elke nuwe versameling, sal genereer. (4)

6.4 Bepaal die maksimum getal versamelings wat gebruik word voordat een miljoen interne gebiede bereik word. (4)

[12]

Totaal vir Module 3: 100 punte

MODULE 4 MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE

VRAAG 1

1.1 Die matriksvergelyking word gegee: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 10 & z \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$

Bereken die waardes van x, y en z. (8)

1.2 Neem aan dat vir elkeen van die volgende matriksidentiteite, die bewerkings moontlik is. Dui aan of die volgende identiteite noodwendig WAAR is of moontlik ONWAAR is:

(a) AB = BA (2)

(b) AB = AC impliseer dat B = C (2)

(c) $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ (2)

(d) A(BC) = (AB)C (2)

[16]

VRAAG 2

2.1 Beskou die transformasie wat voorgestel word deur die matriksvergelyking:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +3 & +3 & +3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = M$$

(a) Beskryf hierdie transformasie in woorde. (3)

(b) Is dit 'n rigiede transformasie? (1)

(c) Skryf matriks M, die beeld van die figuur na die transformasie, neer. (2)

2.2 Beskou die transformasie wat voorgestel word deur die matriksvergelyking:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = N$$

(a) Beskryf hierdie transformasie in woorde. (3)

(b) Is dit 'n rigiede transformasie? (1)

(c) Watter getal wat met 'n transformasiematriks verband hou, gee die skaalfaktor waarmee die oppervlakte van die figuur vermenigvuldig moet word om die oppervlakte van sy beeld te bepaal? (1)

(d) Bereken die getal wat in Vraag 2.2 (c) genoem is. Verduidelik die numeriese verwantskap tussen die oppervlakte van hierdie figuur en die oppervlakte van sy beeld. (3)

2.3 'n Figuur in 'n Cartesiese vlak moet 30° antikloksgewys om die oorsprong geroteer word, gevolg deur 'n refleksie in die lyn $y = 3x$. Bepaal 'n enkele matriks wat hierdie transformasies in die genoemde volgorde sal oplewer. Gee die elemente van hierdie matriks korrek tot twee desimale plekke. (8)

[22]

VRAAG 3

Karyn moet drie lineêre vergelykings gelyktydig oplos vir die veranderlike x, y en z. Om dit te doen ontwerp sy die volgende matriksvergelyking:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 9 & 3 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ w \end{pmatrix}$$

3.1 Karyn besef dat vir $t = -2$ en $w = 8$ die matriksvergelyking 'n unieke oplossing het. Bepaal hierdie oplossing deur berekening. **Moenie** bloot die oplossing gee nie; toon minstens een reël van die berekening deur die gegewe matriksvergelyking te gebruik. (8)

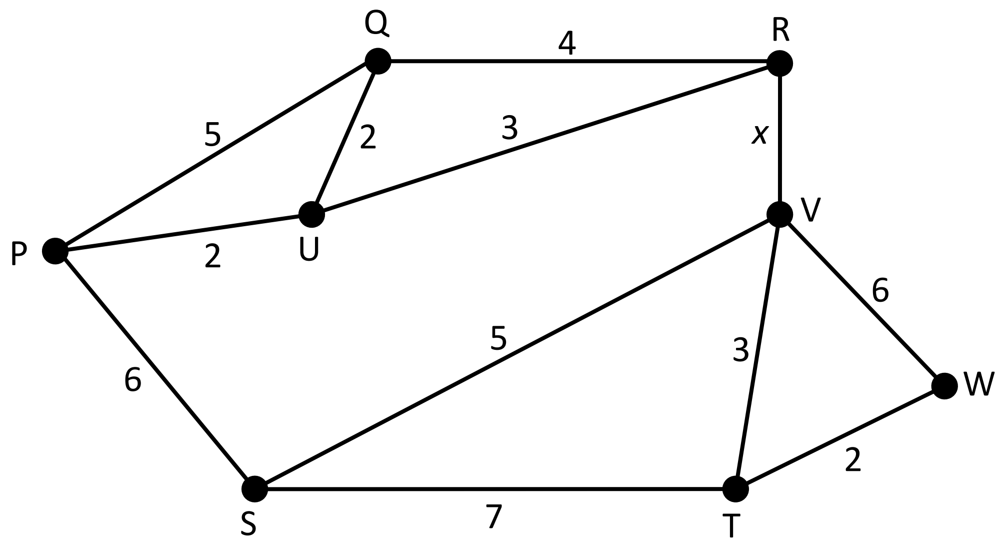
3.2 Bereken die waarde van t waarvoor die matriksvergelyking **nie** 'n unieke oplossing het nie, ongeag die waarde van w. (6)

3.3 Na verdere ondersoek besef Karyn dat deur die waarde van t wat in Vraag 3.2 verkry is te gebruik, die matriksvergelyking in werklikheid 'n oneindige getal oplossings het. Noem die ooreenstemmende waarde van w om dit waar te laat wees. (2)

[16]

VRAAG 4

In die grafiek hieronder moet die pad van kleinste gewig tussen nodus P en nodus W bepaal word. Die gewig van skakel RV is onbekend en word deur *x* verteenwoordig.



4.1 In die kring PUQ kan skakel PQ geïgnoreer word, aangesien PQ > PU + QU. Watter ander skakel in die grafiek kan om 'n soortgelyke rede geïgnoreer word? (2)

4.2 Waarom kan die gewigte van die skakels **nie** lineêre afstande verteenwoordig nie? (2)

4.3 Ontwerp 'n Hamilton-kring op hierdie grafiek en begin by W. (4)

4.4 Bereken die maksimum heelgetalgewig van RV sodat P → U → R → V → T → W die pad van kleinste gewig word. (6)

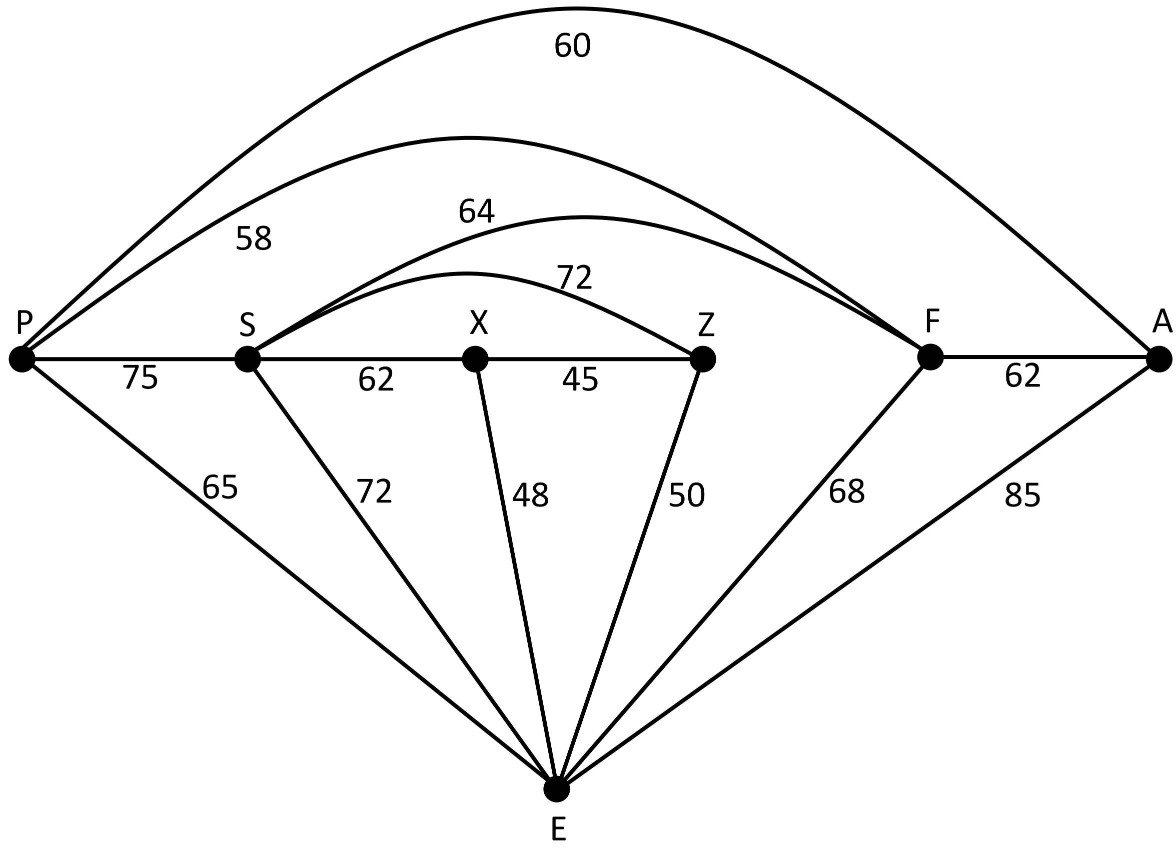
[14]

VRAAG 5

By Afrika-Unie-berade word vyf amptelike tale gebruik: Arabies (A), Engels (E), Frans (F), Portugees (P) en Swahili (S). Suid-Afrikaanse afgevaardigdes gebruik ook isiXhosa (X) en isiZulu (Z).

Dokumente moet uit hul oorspronklike taal in elkeen van die ander ses tale vertaal word en dan terug in die oorspronklike taal om onakkuraathede te kontroleer.

In die grafiek hieronder word tale deur die nodusse voorgestel. Elke skakel verteenwoordig 'n direkte vertaling tussen die twee tale wat deur die skakel verbind word. Die gewig van die skakels verteenwoordig die gemiddelde tyd in minute wat vir vertaling geneem word.



5.1 Watter twee van die sewe tale is die veelsydigste vir vertaling? (2)

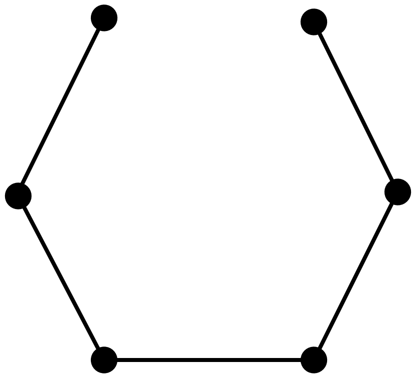
5.2 Begin by Engels en bepaal 'n bogrens vir die tyd wat nodig is om 'n dokument in al die ander tale te vertaal. Gebruik die Naastebure-algoritme en teken die volgorde waarin skakels gekies word duidelik aan. (8)

5.3 Begin by Engels en gebruik inspeksie om 'n "goeie roete" te bepaal vir die tyd wat vir vertaling nodig is. Jou oplossing moet minstens 20 minute vinniger wees as die bogrens wat in Vraag 5.2 bereken is. (10)

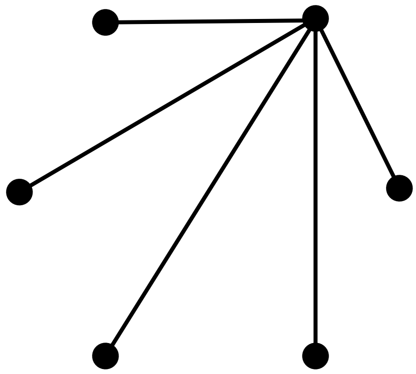
[20]

VRAAG 6

Ses niegelykvormige (non-isomorphic) spanbome kan op ses nodusse geskep word. Twee word hieronder geskets.



Die nodusse het grade
1, 1, 2, 2, 2 en 2



Die nodusse het grade
1, 1, 1, 1, 1 en 5

6.1 Hoeveel skakels sal elkeen van die ses spanbome hê? (2)

6.2 Wat is in elkeen van hierdie ses gevalle die som van die grade van die nodusse? (2)

6.3 Skets die vier oorblywende niegelykvormige spanbome op ses nodusse. (8)

[12]

Totaal vir Module 4: 100 punte

Totaal: 100 punte