GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2016

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL I
MODULE 1: CALCULUS EN ALGEBRA

Tyd: 2 uur | 200 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 7 bladsye en 'n Inligtingsboekie van 2 bladsye (i–ii). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.
2. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders aangedui.
3. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.
4. Diagramme is nie op skaal geteken nie.
5. Trigonometriese berekeninge moet gedoen word deur radiale te gebruik en antwoorde moet in radiale gegee word.
6. Rond jou antwoorde af tot twee desimale syfers, tensy anders aangedui.

VRAAG 1

1.1 Los op vir $x \in R$, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

(a) $|x+3| + 2x = 4$ (7)

(b) $\cos^{-1}\left(\frac{x^2}{8}\right) = \frac{\pi}{3}$ (4)

(c) $lnx^2 - 3log_x e = 1$ (8)

1.2 Bepaal die definisiegebied en waardegebied van die grafiek van:

$y = ln(e^2 - x^2)$ (8)

[27]

VRAAG 2

2.1 Vereenvoudig: $\sqrt{i^4}$ (2)

2.2 Bepaal die reële waardes van $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$ sodanig dat $(3+2i)(a+3i) = bi$. (7)

2.3 Een van die oplossings vir die vergelyking $x^2 - 2x + p = 0$ is $x = q + \sqrt{3}i$.

Bepaal die rasionale waardes van $\boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{q}$. (7)

[16]

VRAAG 3

3.1 Dui aan of elkeen van die volgende bewerings WAAR of ONWAAR is:

(a) Indien 'n funksie differensieerbaar is by 'n punt, moet die limiet van die funksie by daardie punt bestaan.

(b) Indien 'n funksie kontinu is by 'n punt, moet dit ook differensieerbaar wees by daardie punt.

(c) Indien die limiet van 'n funksie by 'n punt nie bestaan nie, sal die grafiek 'n asimptoot by daardie punt hê.

(d) Indien die tweede afgeleide van 'n funksie by 'n punt gelyk is aan nul, sal daar 'n buigpunt op die grafiek by daardie punt wees.

(e) 'n Funksie kan by 'n punt bestaan, ongeag of die limiet van die funksie by daardie punt bestaan of nie.

(f) By 'n lokale maksimum is die ***gradiënt*** van die grafiek dalend. (12)

3.2 'n Funksie word soos volg gedefinieer:

$$f(x) = \begin{cases} p - x^2 & \text{as} \quad x \leq 2 \\ qx + 10 & \text{as} \quad x > 2 \end{cases}$$

Bereken die waarde(s) van p en q indien f differensieerbaar is by $x = 2$. (8)

3.3 Daar word gegee dat $f(x) = x^2 - 6x + 5$ en $g(x) = |x|$.

Skets op afsonderlike assestelsels:

(a) $y = g(f(x))$ (5)

(b) $y = f(g(x))$ (8)

[33]

VRAAG 4

Alisha wil deur induksie bewys dat $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Haar onderwyser het haar die volgende prosedure geleer:

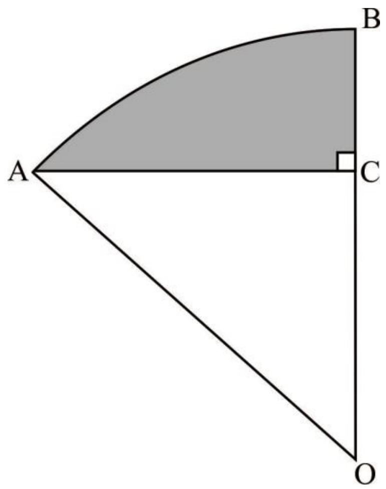
Stap 1: Bewys waar vir $n = 1$
Stap 2: Neem aan waar vir $n = k$
Stap 3: Bewys waar vir $n = k + 1$
Stap 4: Maak 'n gevolgtrekking uit die bewys.

Toon Alisha se berekening vir Stap 3.

[10]

VRAAG 5

Die diagram toon 'n boog AB van 'n sirkel met middelpunt O en radius r. Die lyn AC word loodreg op die lyn OCB getrek. Die gebied wat begrens word deur AC, BC en boog AB is gearseer. $A\hat{O}B = \frac{\pi}{6}$ radiale.



5.1 Bepaal die oppervlakte van ΔAOC in terme van r. (6)

5.2 Bepaal die oppervlakte van die sektor OAB in terme van r. (4)

5.3 Indien die gearseerde gebied $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}$ cm^2 is, bereken die waarde van r. (6)

[16]

VRAAG 6

Verbind die volgende rasionale funksies met die toepaslike grafieke, A–F, hieronder:

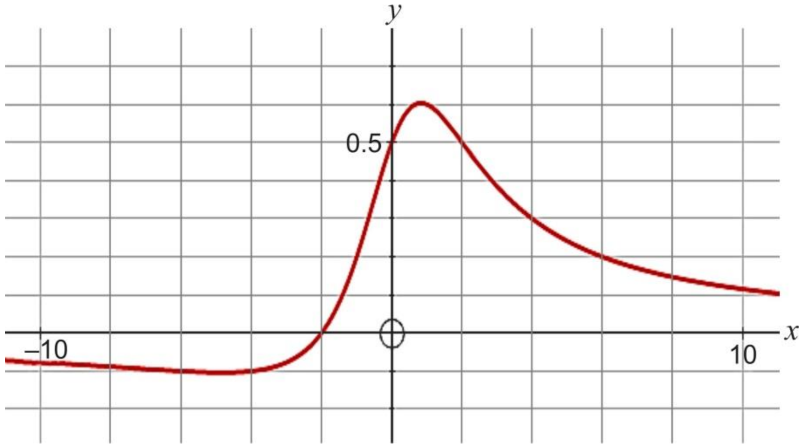
6.1 $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

6.2 $f(x) = \frac{x-2}{x^2-x-6}$

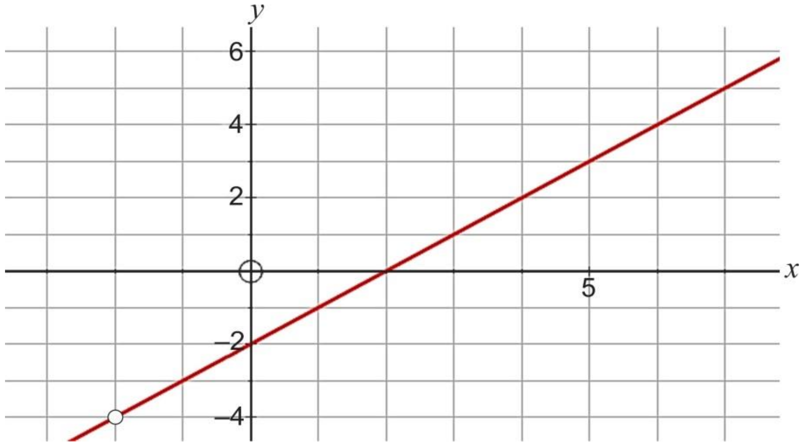
6.3 $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-6x+9}$

6.4 $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-3}$

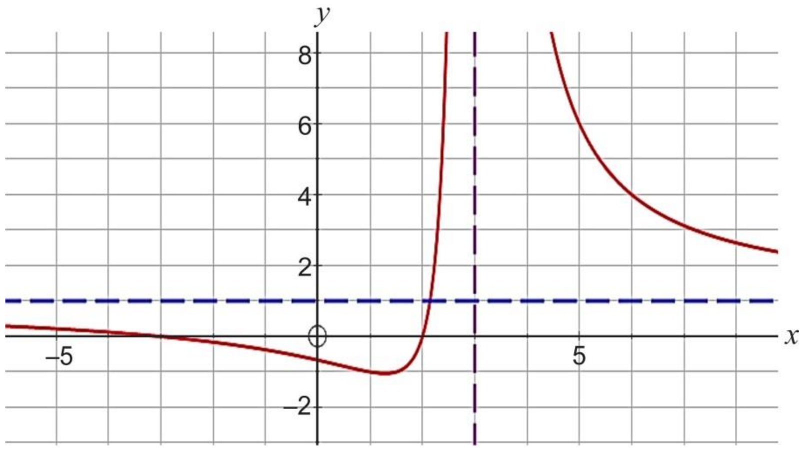
A



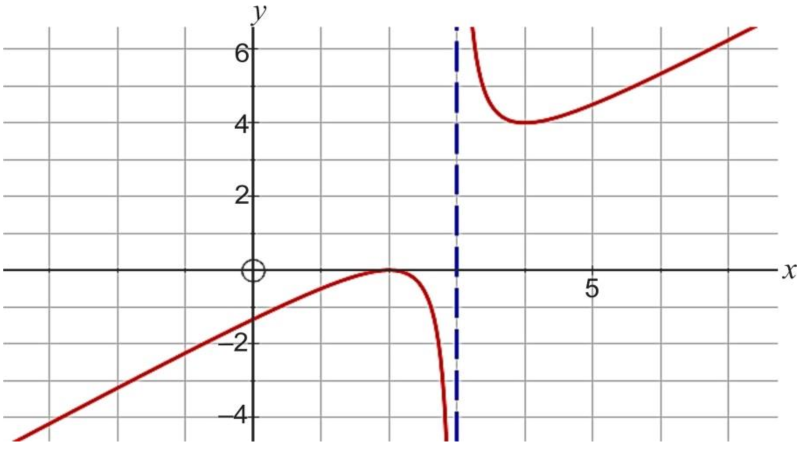
B



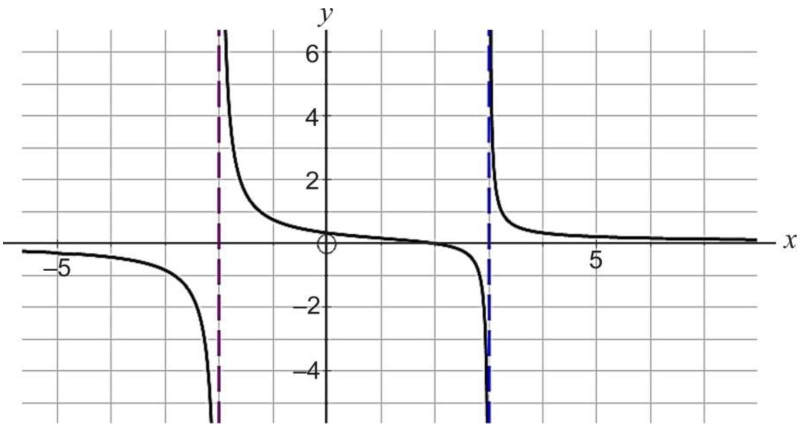
C



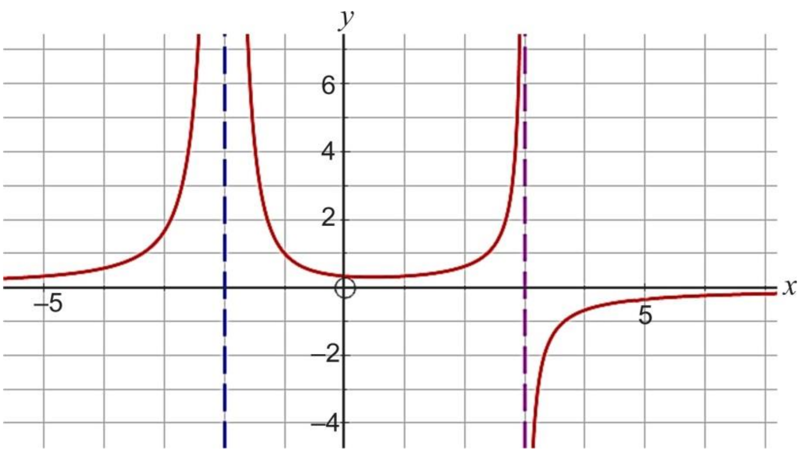
D



E



F



[12]

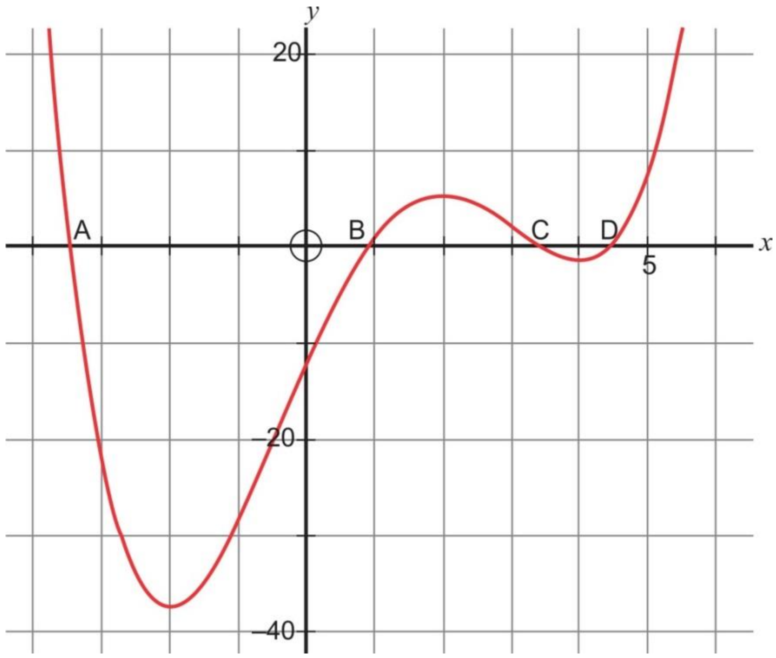
VRAAG 7

Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kromme $x^3 - 2y^2 = 14 - 4x$ by die punt (2; 1).

[11]

VRAAG 8

Die grafiek van $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 16x - 12$ word getoon met stasionêre punte by $x = -2$, $x = 2$ en $x = 4$. Die grafiek het x-afsnitte by die punte aangedui deur A, B, C en D.



8.1 Meld sonder om eers die vergelyking op te los met duidelike regverdiging watter van die afsnitte, A, B, C of D, gevind sal word deur Newton se metode te gebruik met 'n aanvanklike benadering van $x_0 = 2{,}1$. (3)

8.2 Meld enige beperkings op die aanvanklike benadering van x. (2)

8.3 Indien $x_0 = 3$ gegee word, bepaal die x-afsnit by C, korrek tot 6 desimale plekke. (8)

[13]

VRAAG 9

'n Funksie word gegee as $f(x) = x + 4(x+1)^{-2}$.

9.1 Bepaal die koördinate van die stasionêre punt en bewys dat dit 'n lokale minimum is. (10)

9.2 Skryf die vergelyking van die skuins asimptoot neer. (2)

9.3 Bepaal die oppervlakte tussen die grafiek en die x-as op die interval $-p \leq x \leq p$, met $|\, p \,| < 1$, en gee jou antwoord in terme van p in sy eenvoudigste vorm. (6)

[18]

VRAAG 10

10.1 Integreer die volgende:

(a) $\int \left(\sqrt{x} + x^{-1} \right)^2 dx$ (7)

(b) $\int \tan^5 2x \cdot \sec^2 2x \, dx$ (8)

(c) $\int \frac{x}{\sqrt{2-x}} dx$ (9)

10.2 Die integraal van 'n funksie f word gevind deur 'n Riemann-som te gebruik, sodanig dat:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n} \sum_{r=1}^{n} \left[2\left(-1 + \frac{3r}{n} \right)^2 + 1 \right]$$

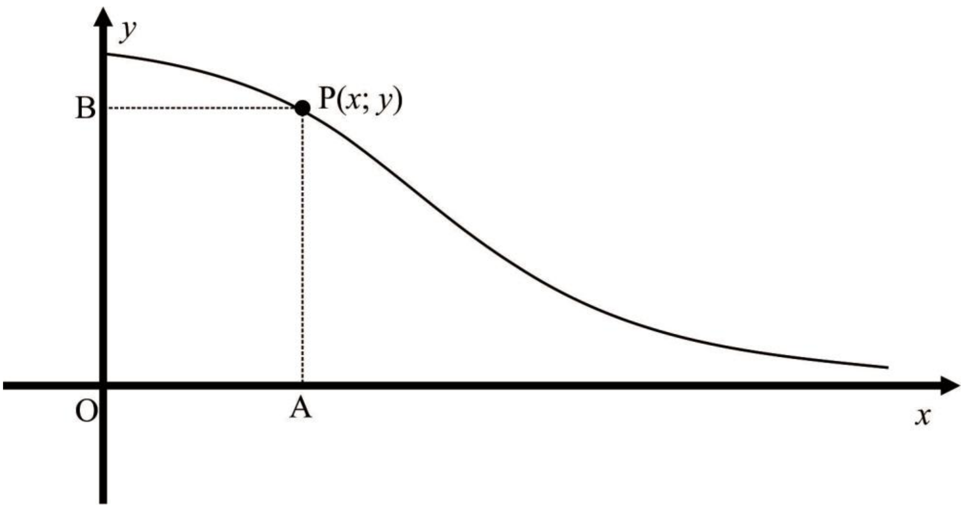
Lei uit hierdie bewering die waardes van a en b af en gee die funksie, f.
(Jy hoef nie die Riemann-som te evalueer nie.) (7)

[31]

VRAAG 11

Verwys na die diagram hieronder.

'n Punt P(x; y) beweeg langs die kromme gedefinieer deur $y = \frac{1}{x^2+4}$ en $x > 0$. Punt A lê op die x-as en punt B op die y-as sodanig dat OAPB 'n reghoek is.



Bepaal deur calculusmetodes te gebruik die maksimum oppervlakte van reghoek OAPB.

[13]

Totaal: 200 punte